MP 2024-2025 *Semaine n° 11 du 31 Mars au 04 avril*

Calcul différentiel et optimisation

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

- *a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles*

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v. Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base. Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.
Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \ldots, x_n)$.

- *b) Différentielle*

Application différentiable au point a. Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Lorsque $f = (f_1, \ldots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a) \cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$. Notation $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée. Notation $\nabla f(a)$.
Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

- *c) Opérations sur les applications différentiables*

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \ldots, f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1, \ldots, f_p$ sont des applications différentiables.
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Interprétation géométrique en termes de tangentes.
Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$.
Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables. Dérivées partielles de

$$(u_1, \ldots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_m)).$$

- *d) Applications de classe $\mathcal{C}^1$*

Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.
L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω. La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.
Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0, 1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω. Démonstration pour Ω convexe.

- *e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie*

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$. Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.
Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$. La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme.
Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

- *f) Optimisation : étude au premier ordre*

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur. Exemples de recherches d'extremums globaux.

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\dot{f}(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.

Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\dot{g}(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\dot{f}(x)$ est colinéaire à $\dot{g}(x)$. Si E est euclidien, traduction en termes de gradient.

Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

- *g) Applications de classe $\mathcal{C}^k$*

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$, $\partial_{j_1,\dots,j_k} f$.

Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω. La notion de différentielle seconde est hors programme.

Théorème de Schwarz. La démonstration n'est pas exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

- *h) Optimisation : étude au second ordre*

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Notation $H_f(x)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x+h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) \cdot h, h \rangle + o(\|h\|^2),$$

$$f(x+h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2).$$

La démonstration n'est pas exigible.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Adaptation au cas d'un maximum local.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.

Adaptation au cas d'un maximum local.

Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).

Arrêt des colles avant les écrits.